

Alternative de Fredholm

Ce développement présente la démonstration de certaines propriétés des opérateurs compacts, ce qui nous conduira à les énoncer sous la forme de l'alternative de Fredholm. Ce développement est en réalité la première étape à l'analyse spectrale des opérateurs compacts et à ce qu'on appelle les opérateurs de Fredholm. Ce développement est donc parfait pour ceux qui aiment la théorie spectrale !

En ce qui concerne les recasages, malheureusement ce développement ne rentre pas dans beaucoup de leçons. Les deux principaux recasages sont dans les leçons 203 et 208. Pour moi, le recasage en 206 est abusif si le développement est présenté comme je l'ai fait (cependant, on pourrait l'ajuster pour l'y faire rentrer, regardez par exemple le développement 'Propriétés des opérateurs compacts' de Thomas Courant).

I - Le développement

✚ Théorème 1

Soit $T \in \mathcal{K}(E)$ un opérateur compact, avec E un Banach. Alors :

- (1) $\ker(I - T)$ est de dimension finie.
- (2) $\mathcal{I}m(I - T)$ est fermée.
- (3) Si $I - T$ est injectif, alors il est inversible.

Preuve :

(1) Posons pour la suite $N = \ker(I - T)$. On a $x \in N$ ssi $Tx = x$. Ainsi, si B_N désigne la boule unité fermée de N , on a $T(B_N) = B_N$. Or, N est un sous-espace vectoriel de E , donc B_N est encore fermée dans E . On en déduit que $B_N \subseteq \overline{T(B_N)}$ est compacte, et par le théorème de Riesz, N est de dimension finie.

(2) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{I}m(I - T)$ telle que $x_n - Tx_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0 \in E$. Montrons que $x_0 \in \mathcal{I}m(I - T)$.

Étape 1 : Cas où $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Par compacité de T , $\exists \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ extractrice telle que $Tx_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y \in E$. Il vient alors :

$$x_{\varphi(n)} = \underbrace{x_{\varphi(n)} - Tx_{\varphi(n)}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0} + \underbrace{Tx_{\varphi(n)}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0 + y$$

d'où :

$$Tx_{\varphi(n)} \rightarrow T(x_0 + y)$$

par continuité de T , et par unicité de la limite,

$$y = T(x_0 + y) = Tx_0 + Ty.$$

Finalement,

$$x_0 = x_0 - Tx_0 = x_0 + y - Ty = (I - T)(x_0 + y).$$

D'où $x_0 \in \mathcal{I}m(I - T)$.

Étape 2 : Cas général.

Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_n := \text{dist}(x_n, N)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $n \in N$ tel que $\|y_n - x_n\| \leq 2d_n$. Montrons que $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Par l'absurde, quitte à extraire, supposons $d_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$z_n = \frac{x_n - y_n}{2d_n},$$

de sorte que $\|z_n\| \leq 1$. Par compacité de T , quitte à extraire, $Tz_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} z \in E$.

On a donc :

$$z_n = z_n - Tz_n + Tz_n = (I - T) \left(\frac{x_n - y_n}{2d_n} \right) + Tz_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 - 0 + z.$$

Donc $Tz = z$ et $z \in N$. Or, $\|z_n - z\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc pour n assez grand,

$$\|x_n - y_n - 2d_n z\| < d_n,$$

ce qui est absurde d'après la définition de d_n comme distance de x_n à N (on a bien $y_n + 2d_n z \in N$).

Par conséquent, $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, et il en est de même pour $(x_n - y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. En appliquant l'étape 1 à cette suite, on obtient que sa limite appartient à $\mathcal{I}m(I - T)$. Or $y_n \in N$ pour tout n , donc $(I - T)(y_n - x_n) = (I - T)x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0$.

Donc $\mathcal{I}m(I - T)$ est fermé.

(3) Par le théorème d'isomorphisme de Banach, il suffit de montrer la surjectivité pour avoir l'inversibilité.

Par l'absurde, supposons $I - T$ non surjectif, et posons

$$E_1 := \mathcal{I}m(I - T) \subsetneq E.$$

$$E_n := \mathcal{I}m((I - T)^n)(E) = (I - T)(E_{n-1}), \quad \forall n \geq 2.$$

L'injectivité de $I - T$ entraîne

$$E_1 \supsetneq E_2 \supsetneq \cdots \supsetneq E_n \supsetneq E_{n+1} \supsetneq \cdots$$

De plus, les E_n sont fermés puisque qu'on peut écrire $(I - T)^n = I - U$ avec U compact, et appliquer le (2). On peut ainsi appliquer le lemme de Riesz (voir paragraphes suivant) : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists x_n \in E_n$, $\|x_n\| = 1$ tel que

$$\text{dist}(x_n, E_{n+1}) \geq \frac{1}{2}.$$

On remarque alors que pour $m > n$:

$$Tx_n - Tx_m = \underbrace{x_n - (I - T)x_n + (I - T)x_m}_{\in E_{m+1}} - x_m.$$

Par hypothèse sur les x_n , il vient :

$$\|Tx_n - Tx_m\| \geq \text{dist}(x_m, E_{m+1}) \geq \frac{1}{2}, \quad \forall m > n.$$

Il est donc impossible de faire converger une sous-suite extraite, ce qui contredit la compacité de l'opérateur T .

L'injectivité de $I - T$ entraîne donc sa surjectivité, et son inversibilité.



✦ Corollaire 2 *Alternative de Fredholm*

Soit T un opérateur compact. On a alors l'alternative suivante : (1) Soit l'équation $Tx - x = 0$ a une infinité de solutions. (2) Soit pour tout $y \in E$, l'équation $Tx - x = y$ possède une unique solution.

II - Lemme de Riesz et un résultat supplémentaire

✦ Propriété 3 *Lemme de Riesz*

Soit E un e.v.n et $F \subset E$ un sev fermé, distinct de E . Alors, pour tout $\delta > 0$, il existe $x \in E$ de norme 1 tel que $\text{dist}(x, F) \geq 1 - \delta$.

Preuve :

Posons pour simplifier $r = 1 - \delta$. La proposition est claire pour $\delta > 1$ i.e. $r \leq 0$, supposons donc $r \in]0, 1[$. Soit $x \in E \setminus F$. Comme F est fermé dans E , si d désigne la distance de x à F , il existe $y \in F$ tel que :

$$\|x - y\| \leq \frac{d}{r}.$$

On considère alors l'élément $z = \frac{x - y}{\|x - y\|}$, de façon à avoir :

$$\forall \tilde{y} \in F, \|z - \tilde{y}\| = \frac{\|x - \tilde{y}\| + \|x - \tilde{y}\| \|z\|}{\|x - \tilde{y}\|} \geq \frac{d}{\|x - \tilde{y}\|} \geq r.$$



Nous avons vu dans ce développement que l'injectivité de l'opérateur $I - T$ entraînait sa surjectivité (et son inversibilité dans le cas Banach). On dispose en réalité d'une équivalence .

♠ Théorème 4

Soit $T \in \mathcal{K}(E)$. Si $I - T$ est surjectif, alors $I - T$ est injectif.

Preuve :

Nous allons d'abord montrer que la suite des noyaux itérés $N_1 = \ker(I - T)$, $N_2 = \ker(I - T)^2$, ... est en réalité constante à partir d'un certain rang. Pour ce faire, supposons par l'absurde que ce ne soit pas le cas. On a de manière évidente la suite d'inclusions :

$$N_1 \subset N_2 \subset \dots \subset N_k \subset \dots$$

Quitte à extraire des noyaux, on peut supposer que cette suite d'inclusion est une suite de stricte inclusion.

Remarquons maintenant que ces noyaux sont de dimension finie (c'est le point 1 du développement), et donc sont fermés. On peut donc appliquer, comme dans le point 3, le lemme de Riesz :

$$\forall k \geq 2, \exists x_k \in N_k, (\|x_k\| = 1), \text{ t.q. } \text{dist}(x_k, N_{k-1}) \geq 1/2.$$

On remarque alors que pour $l < k$:

$$Tx_k - Tx_l = \underbrace{x_k - (I - T)x_k + (I - T)x_l}_{\in N_{l-1}} - x_l.$$

Par hypothèse sur les x_k , il vient :

$$\|Tx_k - Tx_l\| \geq \text{dist}(x_k, N_{l-1}) \geq \frac{1}{2}, \quad \forall l < k.$$

Il est donc impossible de faire converger une sous-suite extraite, ce qui contredit la compacité de l'opérateur T .

Pour conclure, il suffit maintenant que considérer $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que la suite des noyaux stationnent à partir de ce rang. On a en particulier $\ker(I - T)^{k_0} = \ker((I - T)^{k_0})^2$. Posons pour simplifier $g = (I - T)^{k_0}$. On a donc que g est surjectif et que $\ker(g) = \ker(g^2)$. Un résultat classique d'algèbre linéaire (exercice) montre alors que g est injectif, ce qui montre l'injectivité de $I - T$.



III - Remarques

1 - C'est un développement qui niveau temps rentre parfaitement en 15 minutes. Il faut cependant faire attention à ne pas se tromper sur les petits calculs de convergence, ce qui peut faire perdre pas mal de temps (remarquez qu'on fait à chaque fois apparaître $I - T$ par une technique de ± 1).

2 - Il faut mettre dans votre plan l'énoncé du lemme de Riesz. Pour moi, le mettre dans le développement est assez compliqué au niveau du temps mais il faut quand même savoir le démontrer (voir ci-dessous).

3 - Bien entendu, pour aborder ce développement, il faut avoir en tête les résultats classiques sur les opérateurs compacts. Ce n'est pas forcément quelque chose dont vous avez l'habitude, et c'est pourquoi je ne recommande pas ce développement pour ceux qui ne sont pas très à l'aise avec ces notions (qui sont pourtant magnifiques).

4 - L'opérateur $I - T$ est en fait ce qu'on appelle un opérateur de Fredholm : c'est un opérateur dont le dimension du noyau est finie et dont son image est fermée et de codimension finie. Ici, nous avons montré que l'image est fermée (en fait cette condition est automatiquement vérifiée dans des Banach lorsque les deux autres conditions sont vérifiées) et que le dimension du noyau est finie.

5 - L'alternative de Fredholm a été originalement pensée pour la résolutions d'équations intégrales.

IV - Références

[Li] : *Cours d'analyse fonctionnelle*, Daniel Li